Sujet

Un lapin se déplace dans un terrier composé de trois galeries, notées A, B et C, dans chacune desquelles il est confronté à un stimulus particulier. À chaque fois qu'il est soumis à un stimulus, le lapin reste dans la galerie où il se trouve ou change de galerie. Cela constitue une étape.

Pour tout entier naturel n, on note a_n (respectivement b_n et c_n) la probabilité de l'événement : « Le lapin est dans la galerie A (respectivement B et C) à l'étape n ».

À l'étape $n = 0$, le lapin est dans la galerie A.

Une étude antérieure des réactions du lapin face aux différents stimuli permet de modéliser ses déplacements par le système suivant :

$$\begin{cases} a_{n+1} = \frac{1}{3}a_n + \frac{1}{4}b_n \\ b_{n+1} = \frac{2}{3}a_n + \frac{1}{2}b_n + \frac{2}{3}c_n. \\ c_{n+1} = \frac{1}{4}b_n + \frac{1}{3}c_n \end{cases}$$

L'objectif de cet exercice est d'estimer dans quelle galerie le lapin a la plus grande probabilité de se trouver à long terme.

1. Pour tout entier naturel n, on pose $u_n = a_n - c_n$.

a. Démontrer que la suite (u_n) est géométrique en précisant sa raison.

b. Exprimer u_n en fonction de n.

2. Pour tout entier naturel n, on pose $v_n = b_n - \frac{4}{7}$.

a. Expliquer pourquoi, pour tout entier naturel n, $a_n + b_n + c_n = 1$ et en déduire que, pour tout entier naturel n, $v_{n+1} = -\frac{1}{6}v_n$.

b. Exprimer v_n en fonction de n.

3. En déduire que pour tout entier naturel n, on a :

$a_n = \frac{3}{14} + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^n + \frac{2}{7}\left(-\frac{1}{6}\right)^n$, $b_n = \frac{4}{7} - \frac{4}{7}\left(-\frac{1}{6}\right)^n$ et $c_n = \frac{3}{14} - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^n + \frac{2}{7}\left(-\frac{1}{6}\right)^n$.

4. Que peut-on en déduire sur la position du lapin après un très grand nombre d'étapes ?